3. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe C_f et la droite D (Unités graphiques 2 cm).

B/ Soit un entier $n > 0$, on désigne par A_n l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par la droite D, la courbe C_f et les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$.

1. Exprimer A_n en fonction de n.

2. En déduire que la suite (A_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme A_1.

3. Exprimer la somme $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$ en fonction de n. Que représente S_n graphiquement ?

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

33 On considère la fonction numérique f de la variable réelle x, définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}\,e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Interpréter graphiquement.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x strictement positif.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. Tracer la courbe C.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a deux solutions, l'une α dans l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ et l'autre β dans $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

34 A/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Etudier le sens de variation de g et puis dresser son tableau de variation.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles 0 et α telle que $-1.6 \le \alpha \le -1.5$.

4. En déduire le signe de g.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

Etudier les variations de f.

3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6. Soit m un réel négatif.

a. Calculer $\int_m^0 xe^x dx$.

b. Calculer alors $\int_m^0 f(x)dx$.

c. Déterminer $\lim\limits_{m\to-\infty} \int_m^0 f(x)dx$.

35 A/ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2+x+1)\,e^{-x} - 1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

2. Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variations.

3. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une α dans l'intervalle $[1,+\infty[$. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

4. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.